GOVERNO DO ESTADO DO PARANÁ
SECRETARIA DO ESTADO DA EDUCAÇÃO -SEED
SUPERINTENDÊNCIA DA EDUCAÇÃO – SUED

PROGRAMA DE DESENVOLVIMENTO EDUCACIONAL - PDE

MIRTES TAMY GOMES MACHADO

MATERIAL DIDÁTICO

Instituição de Ensino Superior	Universidade Estadual de Londrina UEL
Professor Orientador	Dr. Ulysses Sodré
Área Curricular	Matemática

NOVEMBRO - 2007 – LONDRINA

MIRTES TAMY GOMES MACHADO

PARÁBOLAS – AS CURVAS PRECIOSAS

Trabalho apresentado ao PDE:
Programa de Desenvolvimento Educacional.
Professor Orientador: Dr. Ulysses Sodré.

UEL – LONDRINA – 2007

SUMÁRIO

Parábolas – As Curvas Preciosas

PARÁBOLAS: AS CURVAS PRECIOSAS

1. Introdução

A parábola é uma curva plana muito utilizada no dia-a-dia, embora na maioria das vezes as pessoas não percebam que estão se servindo dessa figura tão importante.

Essa curva é obtida através da intersecção da superfície de um cone com um plano paralelo a uma das geratrizes desse cone.

Para a análise de algumas secções cônicas há a necessidade do cone de duas folhas, porém, para o estudo em questão, que é a parábola, podemos nos limitar ao cone de apenas uma folha, como mostra a figura 1.

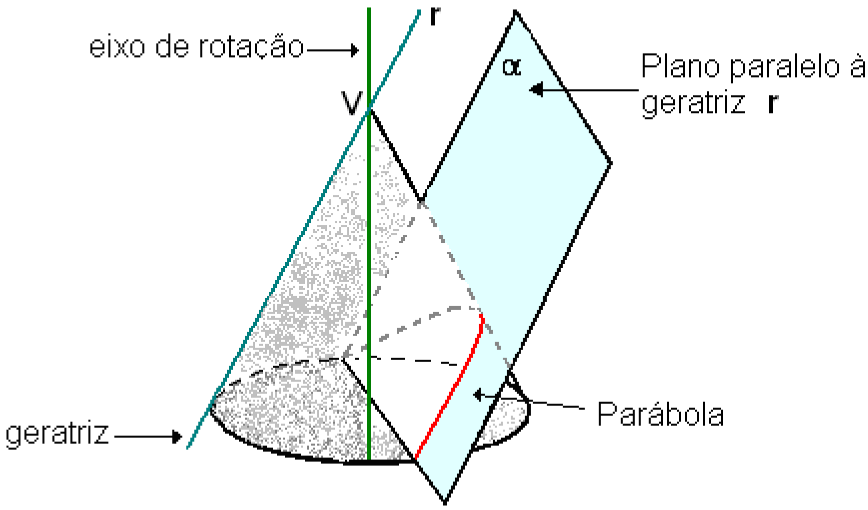


Figura 1: Cone seccionado pelo plano α, paralelo à geratriz r.

A parábola é uma curva simétrica, ou seja, possui um eixo de simetria que passa pelo seu vértice. Esse eixo divide a parábola em duas partes, como mostra a figura 2.

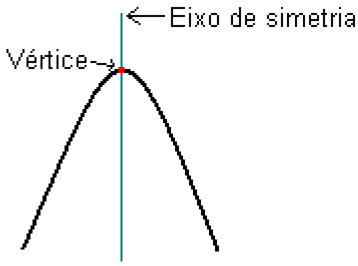


Figura 2: Parábola com seu eixo de simetria e seu vértice

2. Construção de uma Parábola através de sua definição

Considerar um ponto *F* (foco) e uma reta *d* (diretriz) de um plano, o ponto *F* não pertence à reta *d*, o conjunto dos pontos desse plano eqüidistantes de *d* e *F*, denomina-se *Parábola*. (Ver *M. Paiva*, ref. [1]) .

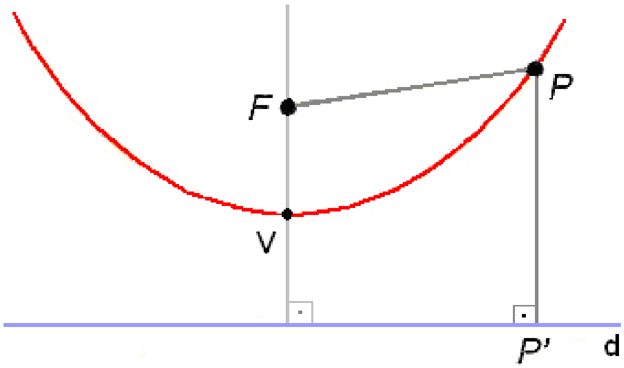


Figura 3: PF=PP' e PP' é perpendicular a reta d

Na figura 3, pode-se observar uma parábola construída a partir de sua definição, isto é, independente de uma função quadrática. Portanto, é o momento de se desprender dos conceitos vagos, que normalmente são apresentados aos alunos quando se aborda este assunto.

3. Teorema: Provar que a secção do Cone com o plano paralelo a uma de suas geratrizes é uma *Parábola*.

Demonstração**:** O esquema que segue foi realizado por Germinal Dandelin (1794 -1847) e extraído do livro de G. G. Garbi, "A rainha das ciências". [2]

a) De acordo com a figura 4, considerar uma das folhas de uma superfície cônica circular e sobre ela uma geratriz g.

b) Traçar um plano α com a condição de ser paralelo somente a g.

c) Sobre a intersecção de α com a superfície, tomar um ponto P e por ele traçar o plano β perpendicular ao eixo da superfície.

d) Chamar de C_2 a circunferência intersecção de β com a superfície e de r_2 a intersecção de α com β.

e) Imaginar agora um plano tangente à superfície e contendo a geratriz g. A intersecção de tal plano com β é a reta t, tangente a C_2 no ponto T e perpendicular à reta OT e ao diâmetro TT'. O plano das retas g e t é paralelo a α. Logo, r_2 e t são paralelas.

f) Seja E a esfera inscrita na superfície e tangente a α.

g) Seja F o ponto de tangência de α com a esfera E. Os pontos de contato entre a superfície e a esfera estão sobre a circunferência C_1, situada sobre um plano γ ortogonal ao eixo e, portanto, paralelo a β. Logo, a intersecção de α com γ (a reta r_1) é paralela a r_2.

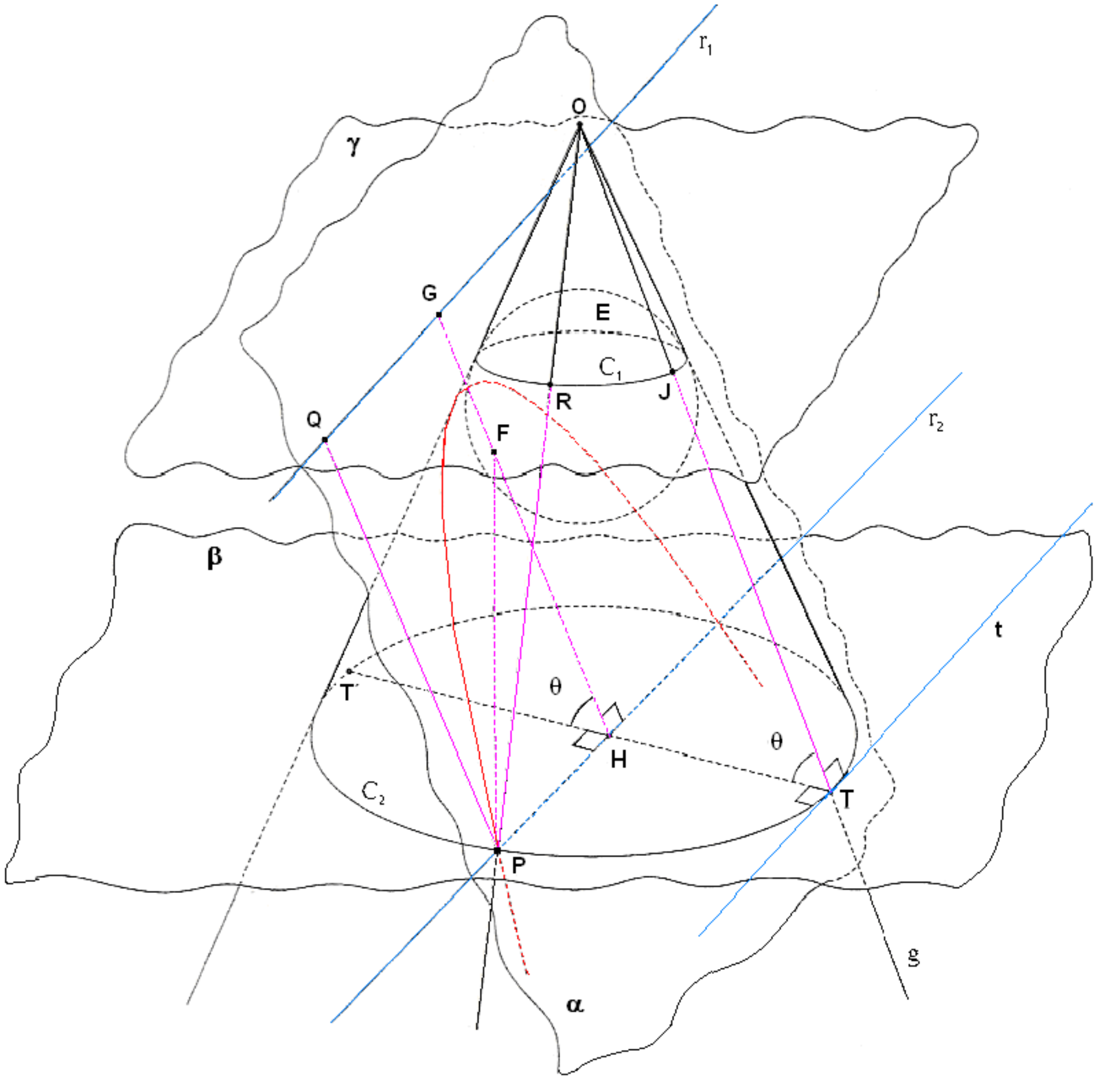


Figura 8: Representação geométrica da secção cônica, de um plano α paralelo à geratriz g.

h) Por *P* traçar a perpendicular *PQ* a r_1 e r_2.

i) Por *F*, traçar a perpendicular *GH* a r_1 e r_2. Logo, *PQ=HG*. A aresta *g* e a reta do segmento *GH* são paralelas, por serem, respectivamente, perpendiculares às paralelas *T* e r_2 e fazerem com *TT´* o mesmo ângulo θ (característico daquela superfície cônica). Os segmentos *GH* e *JT* são iguais, por serem paralelos e estarem entre dois planos paralelos.

j) Unir *O* a *P* e seja *R* a intersecção de *OP* com C_1. Então *JT=PR* (segmentos de geratrizes entre planos paralelos ortogonais ao eixo). Por sua vez, *PF=PR* (tangentes à esfera *E* pelo ponto *P*). Logo, *PQ=GH=JT=PR=PF*, ou seja:
PF (distância de *P* a um ponto fixo) = *PQ* (distância de *P* a uma reta fixa)

Como o ponto *P* é arbitrário sobre a curva, ela é, por definição, uma *Parábola*.

4. Obtenção da equação reduzida da Parábola

Demonstrações baseadas em *PAIVA, 1999.* [1]

Seja *d* a reta fixa (diretriz) e *F* o ponto fixo (foco). Por *F* tracemos o eixo dos *x*, perpendicular à reta fixa *d*. Façamos a distância de *F* a *d* iguais a *2p*. De acordo com a definição de parábola, a curva deve cortar o eixo dos *x* no ponto *O*, eqüidistante de *F* e *d.* Tracemos por *O* o eixo dos *y*.

As coordenadas de *F* são (p,0) e a equação da diretriz *d* é x=-p ou x+p=0.

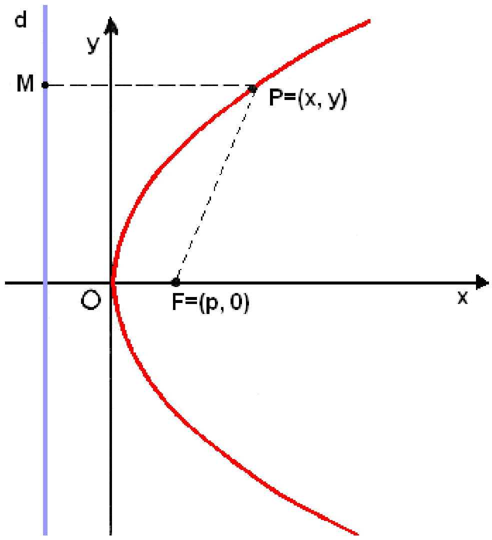


Figura 5: Parábola com a concavidade voltada para a direita

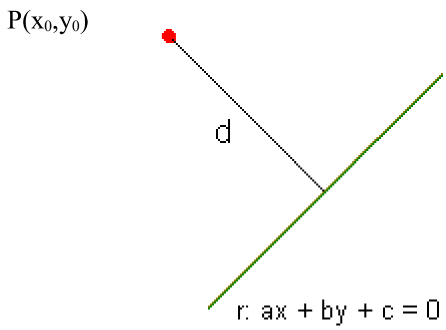
Consideremos um ponto P(x, y), tal que a distância PF = PM.

Sabendo que a distância entre dois pontos A = (x_A, y_A) e B = (x_B, y_B) é dada por:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

e a distância *d* entre um ponto P=(x_0, y_0) e uma reta *r*: ax+by+c=0, como mostra a figura a seguir, é dada por:

$$d_{Pr} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Segundo a definição de parábola, observamos na figura 5, a seguinte igualdade:

$$PF = PM$$

$$\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = \frac{|1x + 0y + p|}{\sqrt{1^2 + 0^2}}$$

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = x + p$$

Elevando os dois membros ao quadrado, temos:

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

Cancelando os termos opostos, concluímos:

$$y^2 = 4px$$

Portanto:

● Se a diretriz da parábola for paralela ao eixo *OY* e sua concavidade voltada para o sentido positivo do eixo *OX* (voltada para a direita), então a sua equação será:

$$y^2 = 4px$$

se o vértice estiver na origem (0,0), em será

$$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$$

se o seu vértice estiver no ponto (x_0,y_0).

● Se a diretriz da parábola for paralela ao eixo *OY* e sua concavidade for voltada para o sentido negativo do eixo *OX* (voltada para a esquerda), então sua equação será:

$$y^2 = -4px$$

se o seu vértice estiver na origem (0,0), ou então:

$$(y - y_0)^2 = -4p(x - x_0)$$

se o seu vértice estiver em (x_0,y_0), como mostra a figura 6.

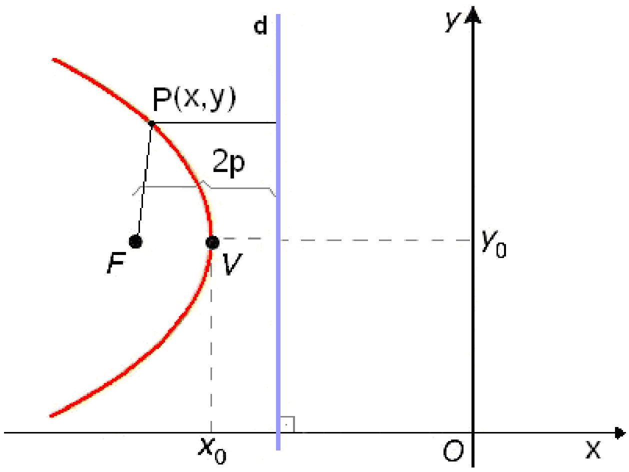


Figura 6: Parábola com a concavidade voltada para esquerda

● Se a diretriz da parábola for paralela ao eixo OX e sua concavidade voltada para o sentido positivo do eixo OY (concavidade voltada para cima), então sua equação será:

$$x^2 = 4py$$

se o seu vértice estiver na origem (0, 0), ou então:

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$$

se o vértice não estiver na origem (0, 0), como a figura 7.

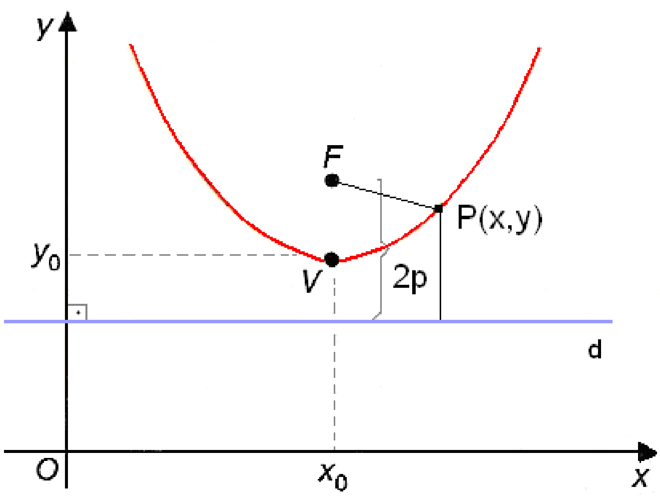


Figura 7: Parábola com a concavidade voltada para cima

● Se a diretriz da parábola for paralela ao eixo OX e sua concavidade voltada para o sentido negativo do eixo OY (voltada para baixo), então sua equação será:

$$x^2 = -4py$$

se o seu vértice estiver na origem (0, 0), ou então:

$$(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)$$

se o seu vértice estiver em (x_0,y_0), como na figura 8.

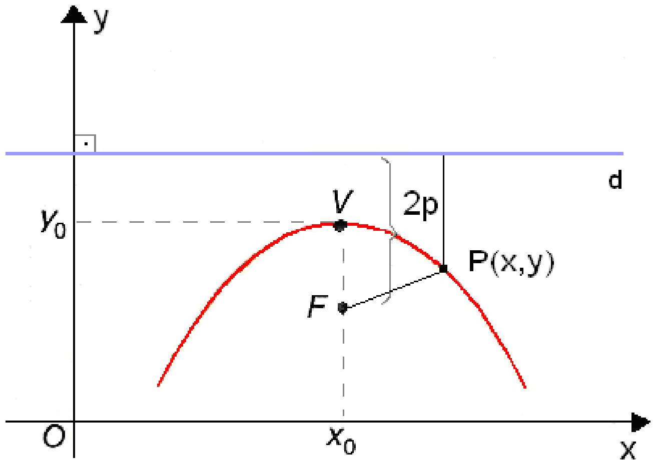


Figura 8: Parábola com a concavidade voltada para baixo

4.1 Exemplo: Obter a equação da parábola cujo foco é F=(2,4) e a diretriz *d* é a reta definida por y–2=0.

Considerar um ponto genérico P=(x,y) que pertence à parábola e impor que a distância do ponto *P* ao ponto *F* é igual a distância do ponto *P* à reta *d* (diretriz), ou seja:

$$PF = Pd$$

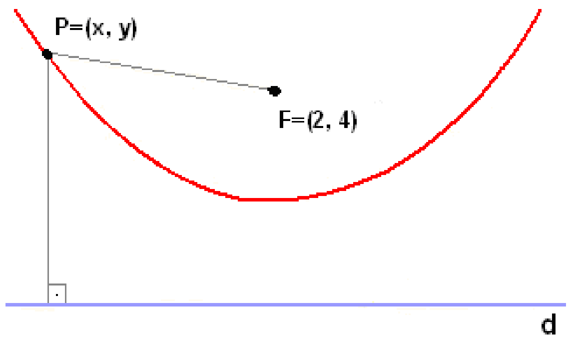


Figura 9: Representação geométrica do exemplo em questão

Substituindo os respectivos valores na igualdade anterior, obtemos:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = \frac{|0x + y - 2|}{\sqrt{0^2 + 1^2}}$$

Simplificando o segundo membro da equação, temos:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = |y - 2|$$

Elevando ao quadrado os dois membros dessa igualdade, obtemos:

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = (y - 2)^2$$

isto é,

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = y^2 - 4y + 4$$

Cancelando os termos opostos, temos:

$$x^2 - 4x - 4y + 16 = 0$$

Portanto, a equação da Parábola é:

$$y = (¼)\, x^2 - x + 4$$

5. Algumas aplicações de parábolas

5.1 Faróis de carro

Ao acendermos os faróis do carro, os raios de luz, provenientes da lâmpada, incidem num espelho *parabólico* e são refletidos paralelamente ao eixo de simetria, como mostra a figura a seguir: *[1]*

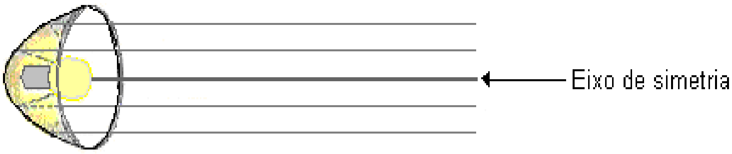


Figura 10: Feixes luminosos de um farol de carro

Girando a parábola em torno do seu eixo de simetria, forma-se a figura apresentada.

5.2 Forno solar

Em uma região da França onde a incidência de luz do Sol é intensa, foi construído um grande espelho côncavo, que é usado como “forno solar” (figura 11 *ref.3*).

Como a distância do Sol à Terra é de cerca de 150 milhões de quilômetros, quando o feixe de luz solar nos atinge seus raios já estão praticamente paralelos. Portanto, ao se refletirem no espelho, os raios desse feixe convergem para seu foco, onde haverá uma grande concentração de energia, tanto luminosa quanto térmica. Assim, no foco do espelho há uma elevação de temperatura e, nesse ponto, é colocado o dispositivo que irá utilizar a energia concentrada. Se a distância focal do espelho for 10 m, esse dispositivo deverá ser colocado a 10 m do vértice do espelho, ficando assim, exatamente sobre o foco.

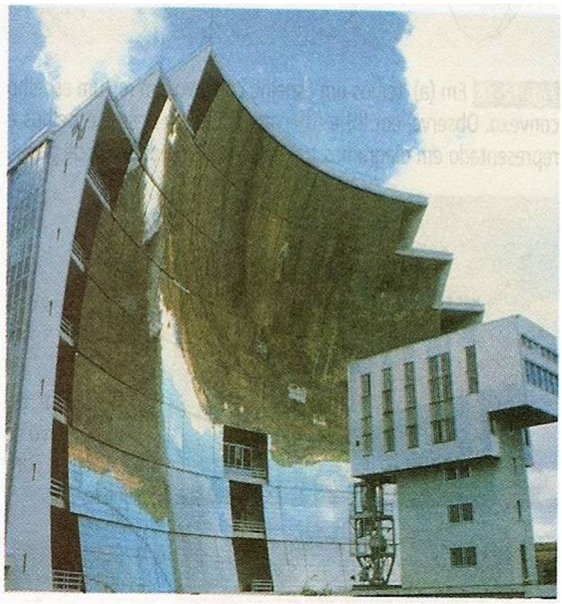


Figura 11: Forno solar (Odeillo, sul da França)

5.3 Antena Parabólica

As antenas parabólicas, apesar de não refletirem luz, são espelhos. Elas são construídas para refletir ondas de radiofreqüências, que tem comprimento de onda muito maior do que o da luz, com valores que variam de algumas centenas de metros até o mínimo de cerca de 0,3m. Para esses comprimentos de onda, quase todas as superfícies são espelhos, mesmo que sejam cheias de buracos, como uma tela de arame.

Se as ondas eletromagnéticas emitidas por um satélite, atingirem a antena parabólica, ocorrerá a reflexão desses raios a um ponto chamado *foco da parábola*, onde está um aparelho receptor que converterá as ondas eletromagnéticas em um sinal que a TV transformará em ondas, que serão os programas que passam e as pessoas assistem diariamente.[4]

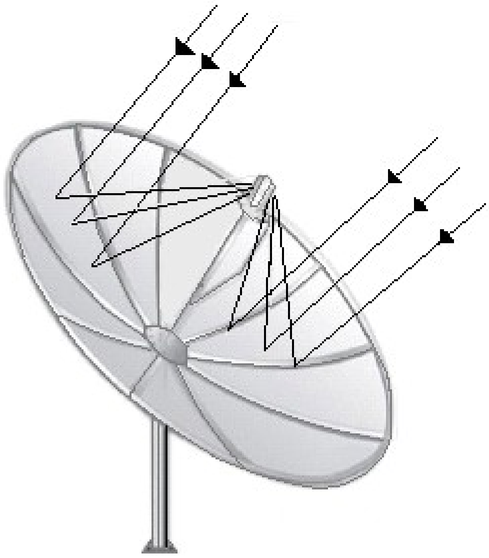


Figura 12: Esquema de incidência de raios sobre uma Antena Parabólica

5.4 Pontes Pênseis

Os comentários que seguem, sobre as pontes penseis, foram extraídos da tese de mestrado, apresentada por *Tales Simões Matos na UFRJ, 2001 [5]*.

As pontes pênseis ou suspensas (figura 14), juntas com as estaiadas (figura 13, *ref.6*), são aquelas que possibilitam os maiores vãos. Nelas o tabuleiro contínuo é sustentado por vários cabos metálicos atirantados ligados a dois cabos maiores que, por sua vez, ligam-se às torres de sustentação.

Os cabos comprimem as torres de sustentação, que transferem os esforços de compressão para as fundações.

Nas pontes pênseis os tirantes são espaçados regularmente, então a carga da ponte é uniformemente distribuída nos cabos e estes formam uma *parábola*.

Figura 13: Ponte da Normandia, França. Foto retirada do site:
http://bridgepros.com/projects/LePontde%20Normandie/normandylg.jpg

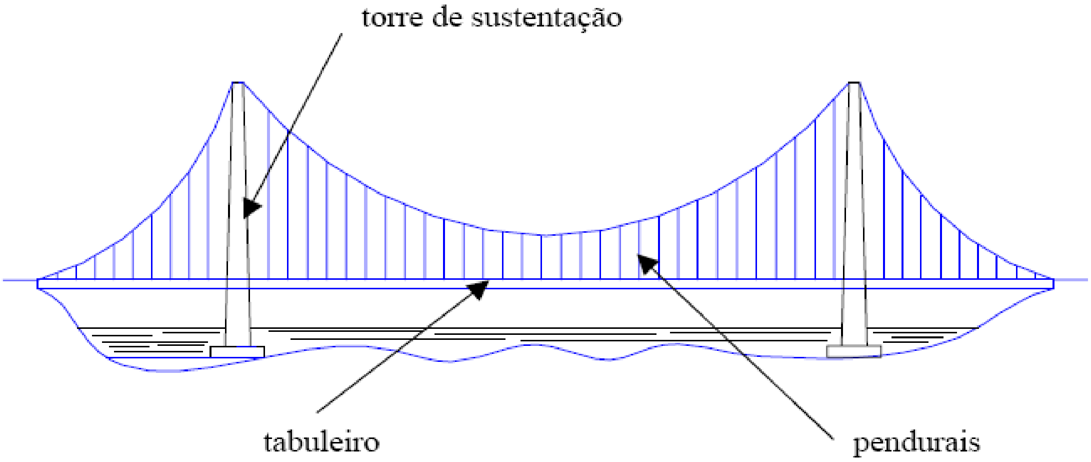


Figura 14: Esquema de pontes pênseis

A ponte Akashi Kaikyo (figura 15, *ref. 8*) é atualmente a maior ponte suspensa do mundo, com 3922 m de comprimento e o recorde de 1991 m de vão central. Construída em 1998, esta ponte liga as cidades de Kobe e Awaji Island no Japão.

Figura 15: Ponte Akashi Kaikyo, Japão
Foto retirada do site: http://www.depedraecal.blogspot.com/

6. ATIVIDADES PROPOSTAS

6.1 Construção da Parábola, tendo o seu foco e sua diretriz.

A construção da parábola, conhecendo seu foco e sua diretriz (*figura 16*), foi baseada em uma figura do livro: “*Matemática”, PAIVA.* [1]

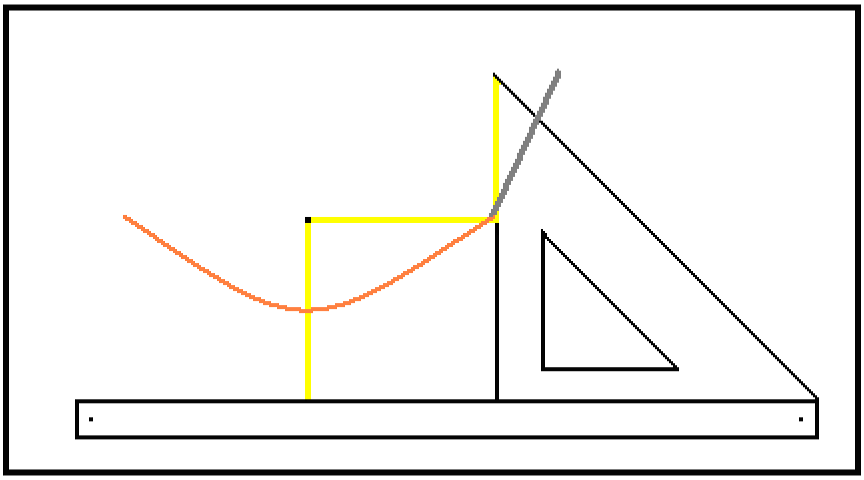


Figura 16: Esquema de construção da Parábola

Materiais necessários:

- 1 tábua de madeira retangular de 40x40x2 cm;
- 1 régua de madeira de 30 cm;
- 1 esquadro (90°);
- 1 pedaço de barbante;
- 3 pregos pequenos;
- 1 lápis.

Montagem:

1. Fixar a régua na tábua, acompanhando um de seus lados, utilizando um prego em cada ponta;

2. Cortar o barbante do tamanho de um dos lados que representam os catetos do esquadro;

3. Fixar uma ponta do barbante em uma extremidade do cateto e a outra em um ponto, que será o foco da Parábola, portanto qualquer ponto da Parábola terá que ser eqüidistante a este ponto e a diretriz.

4. Percorrer o lápis com o barbante esticado, seguindo o esquadro que deverá deslizar sobre um lado da régua (diretriz).

6.2 Construção da Parábola pelo método da dobradura

Na página http://www.sato.prof.ufu.br/Conicas/Curso_ConicasAplicacoes.pdf, foi encontrada a construção da parábola através do método da dobradura, na qual foram realizadas algumas adaptações para apresentar nesta proposta, a fim de que facilite a compreensão e o trabalho dos docentes que pretendem utilizá-lo.*[8]*

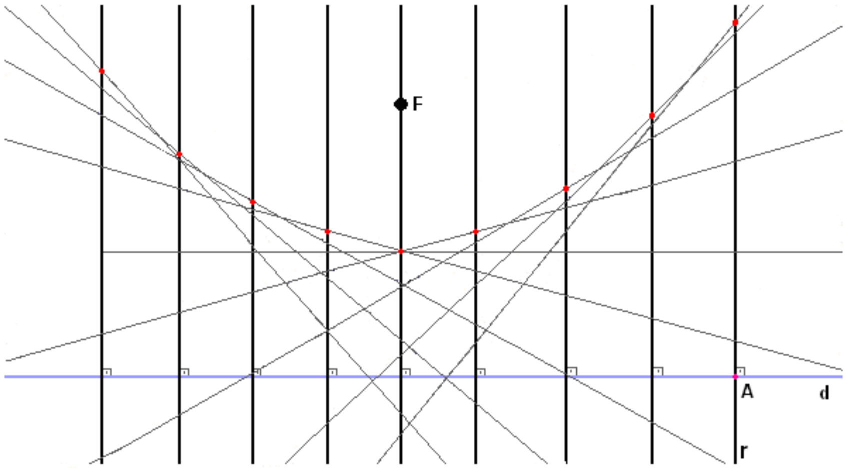


Figura 17: Parábola – método da dobradura

Utilizar uma folha de papel-manteiga, para realizar os seguintes procedimentos:

1. Traçar uma reta diretriz *d*.

2. Marcar um ponto *F* fora dessa reta, que será o foco da parábola;

3. Tomar um ponto *A* da reta *d*;

4. Traçar uma reta perpendicular *r*, à reta diretriz passando pelo ponto *A*;
5. Dobrar a folha fazendo sobrepor o ponto *A* ao ponto *F* (foco);
6. Traçar uma reta *t* coincidindo com a dobra feita;

7. Marcar o ponto de intersecção de *t* com *r*;

8. Repetir o processo, tomando outros pontos sobre a reta *d*;

9. Ligar os pontos de intersecção das dobras com as perpendiculares que passam pelos pontos considerados sobre a reta *d*;

6.3 Construção de um refletor de raios luminosos

Construir um refletor de raios luminosos, com o formato de uma Parábola, onde os raios incidirão paralelamente ao eixo de simetria da mesma, comprovando a propriedade da Parábola (Ver: *Primeira Atividade* em *"Atividades Propostas"*, neste Material Didático).

6.4 Confecção de um cone

Construir um cone de uma folha, analisando suas secções de acordo com o ângulo formado com uma de suas geratrizes, dando ênfase à figura que se forma, ou seja, a Parábola, quando o plano que o secciona é paralelo à geratriz considerada (Ver: *Segunda Atividade* em *"Atividades Propostas"*, neste Material Didático).

6.5 Construção de Parábola com o *software* gratuito *GeoGebra*

A idéia central para esta atividade, foi extraída da ótima página, http://www.sato.prof.ufu.br/Conicas/Curso_ConicasAplicacoes.pdf, porém, realizamos algumas adaptações para utilizar o software gratuito *Geogebra*, que permite desenvolver atividades dinâmicas de matemática. Procurei descrevê-la passo a passo, para que facilite o trabalho do docente que não conhece este software. Em seguida, complementei com a construção de parábolas através de funções do segundo grau, relacionando seus coeficientes com a sua representação gráfica. (*Ver: Terceira Atividade em "Atividades Propostas", neste Material Didático*).

6.6 Construção espacial de Dandelin

Esta construção deverá ser realizada pelo professor, a fim de auxiliá-lo durante a demonstração que prova que a secção do cone com um plano paralelo a uma de suas geratrizes é uma parábola, facilitando assim, a compreensão por parte dos alunos. (*Ver: Quarta Atividade em "Atividades Propostas", neste Material Didático*).

7. Conclusão

Analisando este material, podemos observar que as parábolas não são somente a representação gráfica da função quadrática, como geralmente são trabalhadas em sala de aula, de uma forma quase sem utilidade. Explorando este conteúdo, abordamos algumas aplicações das parábolas, mostrando que são essenciais na construção de alguns objetos comuns no cotidiano, tornando este assunto mais significativo, facilitando assim a assimilação do conteúdo. As atividades práticas apresentadas auxiliam o professor de matemática no desenvolvimento deste conteúdo, tendo a oportunidade de apresentar este assunto de forma diferente da apenas teórica, despertando o interesse dos alunos em participar das aulas, pois, atualmente esta é uma das dificuldades que se apresenta ao lecionar esta disciplina.

8. Referências

[1] PAIVA, Manoel. Matemática. Vol. Ú. São Paulo. Editora Moderna, 1999.

[2] GARBI, Gilberto G. A Rainha das Ciências: Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. 1. ed. São Paulo. Editora Livraria da Física, 2006.

[3] MÁXIMO, Antônio e Alvarenga, Beatriz. Física. Vol. Ú. São Paulo. editora spicione, 2005.

[4] Aplicações práticas das parábolas. Antenas parabólicas. Disponível em: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/fundam/eq2g/quadratica.htm>. Acesso em 28 nov. 2007, às 22:13 h.

[5]] MATOS, T. S. Programa para análise de superestruturas de pontes de concreto armado e protendido. p. 35. Dissertação (Mestrado em Ciências Sociais) – UFRJ, Rio de Janeiro, 2001. Disponível em: <http://www.coc.ufrj.br/teses/mestrado/estruturas/2001/teses/MATTOS_TS_M_01_t_M_est.pdf>, Acesso em 28 nov. 2007, às 12:15 h.

[6] Disponível em: http://bridgepros.com/projects/LePontde%20Normandie/normandylg.jpg, acessado em 26 nov. 2007, às 22:17 h.

[7] De Pedra e Cal. Akashi Kaikyo - A rainha das pontes suspensas. Disponível em: <http://www.depedraecal.blogspot.com/. Acesso em 06 nov. 2007, às 10:12 h.

[8] As Cônicas e suas Aplicações. A construção da parábola pelo método da dobradura. p. 32. Disponível em: <http://www.sato.prof.ufu.br/Conicas/Curso_ConicasAplicacoes.pdf>, Acesso em 19 nov. 2007, às 15:45 h.