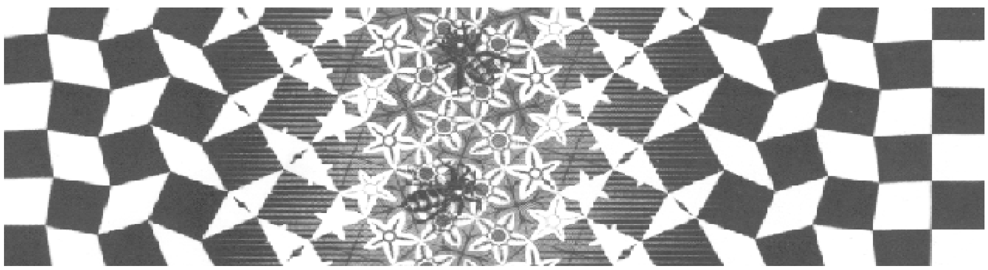
Desenho, Geometria e Arquitetura On-Line
www.mat.uel.br/geometrica

Resumo. Maria Bernadete Barison apresenta definições e figuras relativas ao estudo de Malhas Planas Poligonais em Desenho Geométrico. Geométrica vol.1 n.12a. 2005

MALHAS PLANAS POLIGONAIS

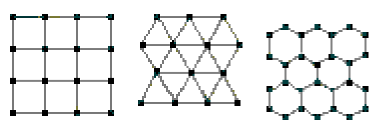
Malha é um espaço aberto entre nós de rede. No caso de os nós estarem situados num plano, como os nós se interligam por segmentos de reta, os espaços abertos entre eles tomam a forma de polígonos planos, cujos vértices são os próprios nós da malha. A teia de aranha é um exemplo natural de malha plana com função-solução estrutural. As malhas aleatórias são infinitas, já que um grupo de pontos em um plano define uma malha. Se os pontos não estiverem contidos no mesmo plano, definirão uma rede espacial. As malhas podem ser vistas a cada instante; seja num céu estrelado, numa calçada de pedras, etc. As mais interessantes são as repetitivas, ou seja; as que seguem regras de formação. Não é muito grande o número de malhas repetitivas.



M.C.ESCHER - Pormenor de *Metamorfose*, XILOGRAVURA, 1939-40 E 1967-68

MALHAS REGULARES

São formadas por apenas um tipo de polígono regular, que podem ser o quadrado, o triângulo regular e o hexágono regular.

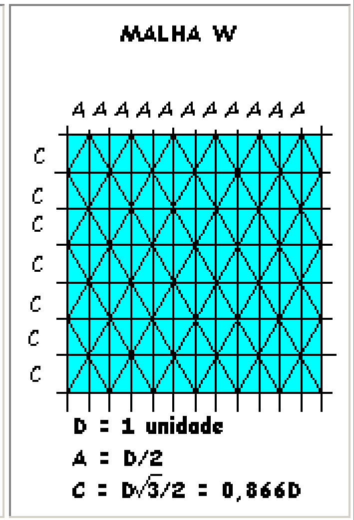


MALHAS REGULARES

1. A **malha triangular** é a mais densa de todas (maior número de vértices em uma mesma área), o que pode ser avaliado considerando-se o somatório das áreas das figuras em torno de um nó.

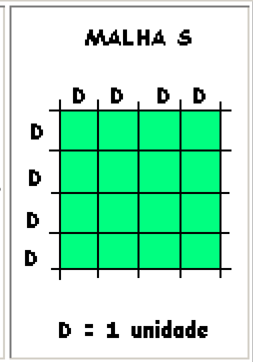
Construção da malha triangular:

Resumo. Maria Bernadete Barison apresenta definições e figuras relativas ao estudo de Malhas Planas Poligonais em Desenho Geométrico. Geométrica vol.1 n.12a. 2005

Para desenhar a malha triangular com o lado do triângulo igual a "D" faça um feixe de paralelas com distância "A" = "D"/2 e outro ortogonal com distância "C" = 0,86660 "D". Unindo os pontos conforme indicado na figura, está construída a malha.	

2. A **malha quadrada** é a que o homem mais utiliza em suas construções. O quadrado não é muito estável, facilmente se deforma em um paralelogramo. Seu uso é tão antigo que uma medida de área refere-se a "quadrados".

Construção da malha quadrada:

Marque um feixe de paralelas separadas entre si de uma distância constante igual a "D". Em seguida, marque um outro feixe de paralelas ortogonal à direção anterior, também separadas a uma distância "D.	

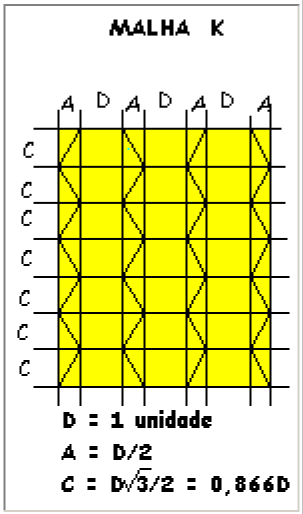
3. A **malha hexagonal**, utilizada pelas abelhas na construção das colméias, é a que mais facilmente se adapta as formas curvas; sejam curvas planas ou espaciais. Um só hexágono é menos estável que o quadrado, mas a malha hexagonal é quase tão rígida quanto a de triângulos, com a vantagem de ser menos densa.

Construção da malha hexagonal:

Desenho, Geometria e Arquitetura On-Line
www.mat.uel.br/geometrica

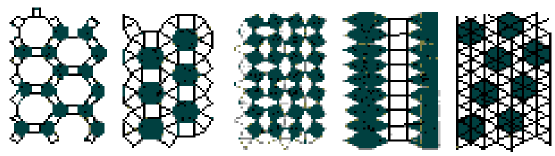
Resumo. Maria Bernadete Barison apresenta definições e figuras relativas ao estudo de Malhas Planas Poligonais em Desenho Geométrico. Geométrica vol.1 n.12a. 2005

Para desenhar a malha hexagonal, numa direção o feixe tem distância constante "C" = 0,86660 "D" e na outra as distâncias são "D"e "A"= "D"/2.



MALHAS SEMI-REGULARES

As **malhas semi-regulares** são formadas por combinações de polígonos regulares em torno de um ponto (nó).



Existem **21** possíveis combinações de **polígonos regulares** em torno de **um ponto** (nó). Estas combinações são mostradas na tabela abaixo.

MALHA	N1	N2	N3	N4	N5	N6	ÁREA	DENSIDADE
A	**3**	**7**	**42**	-	-	-	-	-
B	**3**	**8**	**24**	-	-	-	-	-
C	**3**	**9**	**18**	-	-	-	-	-
D	**3**	**10**	**15**	-	-	-	-	-
E	**4**	**5**	**20**	-	-	-	-	-
F	**5**	**5**	**10**	-	-	-	-	-
G	**3**	**12**	**12**	-	-	-	22,8253	0,0438
H	**4**	**6**	**12**	-	-	-	14,7942	0,0676
J	**4**	**8**	**8**	-	-	-	10,6569	0,0938
K	**6**	**6**	**6**	-	-	-	7,7942	0,1283
L	**3**	**3**	**4**	**12**	-	-	13,0622	0,0766
M	**3**	**4**	**3**	**12**	-	-	13,0622	0,0766
N	**3**	**4**	**4**	**6**	-	-	5,0311	0,1988
P	**3**	**4**	**6**	**4**	-	-	5,0311	0,1988
Q	**3**	**3**	**6**	**6**	-	-	6,0622	0,1650
R	**3**	**6**	**3**	**6**	-	-	6,0622	0,1650
S	**4**	**4**	**4**	**4**	-	-	4	0,25

Resumo. Maria Bernadete Barison apresenta definições e figuras relativas ao estudo de Malhas Planas Poligonais em Desenho Geométrico. Geométrica vol.1 n.12a. 2005

T	**3**	**3**	**3**	**4**	**4**	-	4,2990	0,2326
U	**3**	**3**	**4**	**3**	**4**	-	4,2990	0,2326
V	**3**	**3**	**3**	**3**	**6**	-	4,3301	0,2309
W	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	2,5981	0,3849

As combinações de **A até F não** permitem **repetições contínuas** no plano e as combinações **K, S e W** referem-se às **malhas regulares** hexagonal, quadrada e triangular, respectivamente. Para analisar a área em torno de cada vértice de forma a estimar a densidade da malha temos que, em função do lado, as áreas são:

Octógono - 4,82843 L^2
Dodecágono - 11,19615 L^2
Triângulo - 0,43301 L^2
Quadrado - 1,0000 L^2
hexágono - 2,59808 L^2

1. MALHAS SEMI-REGULARES SIMPLES

Como vemos na tabela acima, temos 15 tipos de vértices capazes de fornecerem malhas planas. Oito vértices podem ser utilizados para construir as chamadas **malhas semi-regulares simples** por terem mais de um tipo de polígono regular e somente um tipo de nó. Esses **oito** tipos de malhas são:

Malha	Série base ortogonal
G	ACA - CACD
H	ABACDC - ABAD
J	FDF - FDF
P	ABAD - ABA
R	C - A
T	CD - A
U	ABA - ABA
V	C - A

2. MALHAS SEMI-REGULARES DUPLAS

Combinando-se 2 tipos de vértices (de G a W) obtemos as chamadas **malhas semi-regulares duplas** com mais de um tipo de polígono e dois tipos de vértices.

Malha	Série base ortogonal
TS	DCD - A
TW	CDC - A
NR1	CDC - ADA
NR2	CDC - A
RQ	C - ADA
GM	ACDCA - ACDCA
LW	CABACD - AABAA
PU1	ABAAABA - ABEBA
PU2	ABA - ABADABA

HP	ABACDCABA - ABAD
PT	DABABA - ABEBA
PN1	ABEBBEBA - ABEBADABEBA
PN2	ABEBADABEBA - ABABADABABA
UW1	ABEBA - ABAAABA
UW2	AABAA - ABA
UW3	AABAA - ABA

3. MALHAS SEMI-REGULARES TRIPLAS

Combinando-se três tipos de vértices (de G a W) obtemos as chamadas **malhas semi-regulares triplas** com mais de um tipo de polígono e três tipos de vértices.

Malha	Série base ortogonal
TWS	CDDC - A
KQW1	C - AADAA
KQW2	C - AADAA
NRS1	CDDC - ADA
NRS2	CDDC - A
VWQ	C - AADAA
MLU	AABAAABAA - AABAAABAAABAA
LUW	ABACDCABA - AABAA
UPT1	ABADABA - AABAABAA
UPT2	AABADABAA - AABAABAA
TWU1	AABABAA - ABEBA
TWU2	AABAA - AABAABAA
TWU3	AABAABAA - AABAABAA
TWU4	ABEBBEBA - AABEBAABEBAA

Em resumo foram apresentadas:

- 3 malhas regulares K, S, W.
- **8 malhas semi-regulares G, J, H, P, R, U, T, V.**
- 11 combinações de 2 vértices formando **16 semi-regulares** duplas.
- 8 combinações de 3 vértices formando **14 semi-regulares** triplas.

No total são **41 diferentes malhas**, que talvez não sejam as únicas, já que não há um método para provar o número limite de combinações possíveis.

CONSTRUÇÃO DE UMA MALHA SEMI-REGULAR

Como no caso das malhas regulares são usados dois feixes de retas paralelas ortogonais. Estas retas paralelas são distanciadas pelos valores:

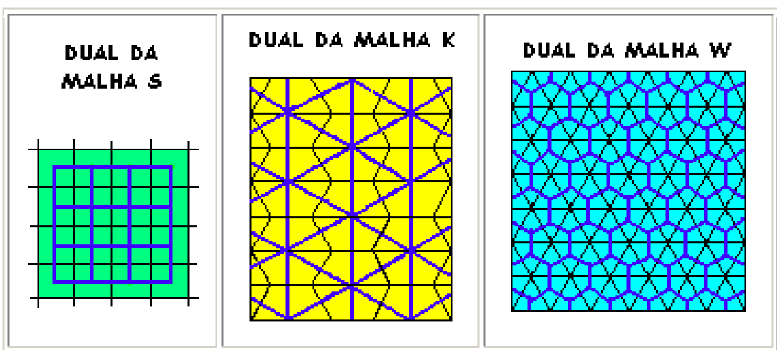
A = 0,5 D
B = 0,366 D
C = 0,866 D
D = lado do polígono
E = 0,134 D

Os valores utilizados em cada malha para traçar as retas paralelas estão especificados nas tabelas anteriores (série base ortogonal)

F = 0,7071 D
G = 0,2887 D
H = 0,5774 D
I = 0,1057 D
K = 0,1830 D
M = 1,0774 D
N = 0,7887 D
P = 0,683 D
Q = 1,183 D
R = 0,3943 D
S = 0,2113 D
T = 0,4717 D

MALHAS DUAIS

As **malhas** ditas **duais** são aquelas que **têm por nós** os **centros dos polígonos** definidos pelas malhas semi-regulares. As **malhas regulares** são **duais** de **si mesmas**, ou seja; a triangular é dual da hexagonal (e vice-versa) e a quadrada é dual dela própria.



As **semi-regulares**, seja singular, dupla ou tripla, **têm suas** próprias **duais**, com características definidas. São formadas por vértices de mais de um tipo (o número de tipos de nós é igual ao número de polígonos da malha de origem). Como **são 15** os **tipos de vértices** que dão origem às malhas semi-regulares, são **15 os tipos de polígonos especiais** "semi-regulares".

Malha dual	Série base ortogonal
G	(D+C) - M
H	(A+C)PP(A+C) - Q
J	(A+F) - (A+F)
P	RNNR - P
R	H - D
T	GNNG - A
U	GRRG - GRRG
V	G - A

Malha dual	Série base ortogonal
TS	DNGN - A
TW	NGHGN - A

NR1	HNNH - D
NR2	HNNH - D
RQ	H - D
GM	NMMN - NMMN
LW	IGHGNNGHGI - APPA
PU1	PRGAGRP - GRIGIRG
PU2	GRPPRG - NRRGGRRN
HP	PP(A+C)(A+C)PP - NRQQRN
PT	NGIBIBIGN - AKAKA
PN1	PIBIKKIBIP - NSKAPPAKSN
PN2	NSKAPPAKSN - PTSSTNNTSSTP
UW1	GSKIGIKSG - GGIRGAGRIGG
UW2	GGIIGG - AGRRGA
UW3	AGRRGGRRGA - GGRIGGRIGG

Malha	Série base ortogonal
TWS	NGHGND - A
KQW1	G - ADDA
KQW2	GGGCCGGG - ADDA
NRS1	HNDNH - D
NRS2	HNDNH - D
VWQ	GGHGG - ADDA
MLU	Usar como base a malha original
LUW	NGHGIIGGGGIIGHGN - APRGAARPA
UPT1	NGIRGGRIGN - AGRPPRGA
UPT2	AGRIGNNGIRGA - AGGIPPIGGA
TWU1	AGGIRGGRIGGA - GSIITIISG
TWU2	AGRIGGAAGGIRGA - GGIIGGAAGGIIGG
TWU3	AGGIRGGRIGGA - GGIRGAAGRIGG
TWU4	Usar como base a malha original

CONSTRUÇÃO DAS MALHAS DUAIS

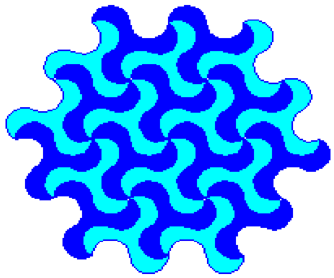
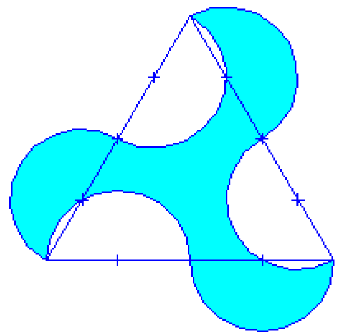
Como no caso das malhas regulares são usados dois feixes de retas paralelas ortogonais. Estas retas paralelas são distanciadas pelos valores:

A = 0,5 D
B = 0,366 D
C = 0,866 D
D = lado do polígono
E = 0,134 D
F = 0,7071 D
G = 0,2887 D
H = 0,5774 D
I = 0,1057 D
K = 0,1830 D
M = 1,0774 D
N = 0,7887 D
P = 0,683 D
Q = 1,183 D
R = 0,3943 D
S = 0,2113 D
T = 0,4717 D

Os valores utilizados em cada malha para traçar as retas paralelas estão especificados nas tabelas anteriores (série base ortogonal)

MALHAS DEFORMADAS

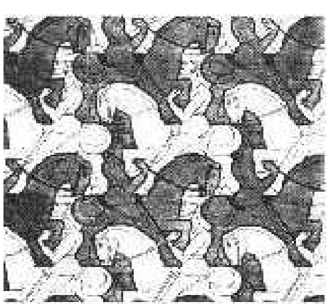
Uma malha plana pode ser deformada. Esta deformação pode ser em relação às suas dimensões em uma das direções, ou em ambas, pode ser também modificada em relação ao ângulo formado entre as direções, seja tirando e acrescentando partes.

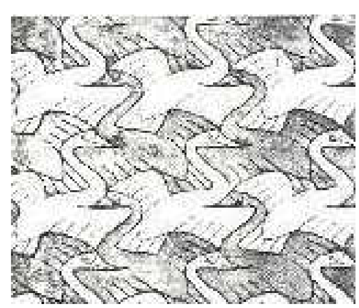



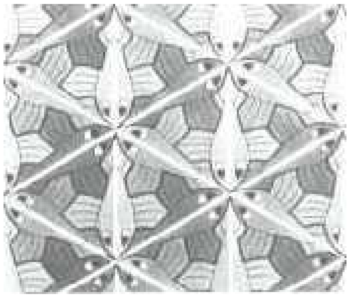
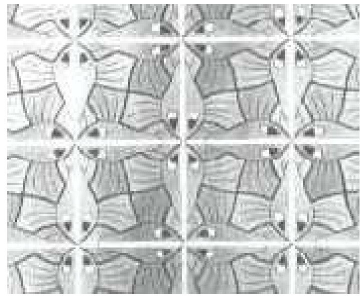
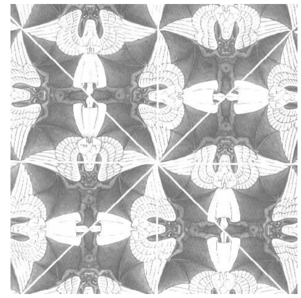
Com isso, originam-se novas malhas. Um **exemplo** são os **mosaicos de M. C. Esher.** Um **mosaico** é uma obra constituída por fragmentos justapostos de pedra ou vidro de várias cores, muito utilizado em pavimentação decorativa. Os mosaicos romanos e os bizantinos são os mais famosos e conhecidos. O **mosaico geométrico** é um arranjo obtido pela combinação de figuras e módulos geométricos, observando padrões de simetria. Deve-se a **Kepler** as primeiras investigações na teoria da pavimentação do plano euclidiano, com um tratamento matemático para o problema, no seu livro "Harmonia do Mundo", de 1619.

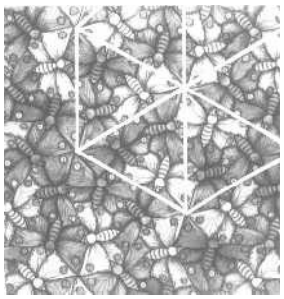
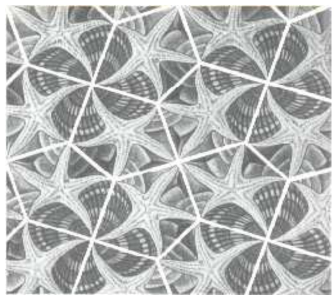
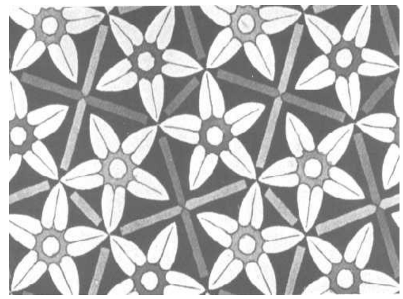
OS PADRÕES DE M. C. ESCHER

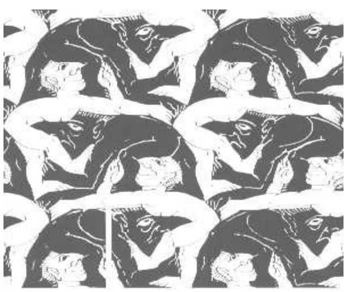
Os trabalhos do **artista holandês M. C. Escher** (1898-1972) até hoje intrigam os estudiosos da área por sua beleza e singularidade, incomparáveis quanto à sua precisão técnica e conhecimento matemático que expressavam. À primeira vista, muitas de suas obras parecem naturais, mas observando melhor, descobre-se que o que foi tomado como plausível é, na verdade impossível, e o observador é levado a olhar mais uma vez e outra vez, até que descobre as surpresas escondidas que a obra lhe oferece. **Como é que Escher fez isso?** Ele tinha uma fantasia genial e era um excelente artista na técnica de gravura, mas a chave para os surpreendentes efeitos das gravuras, é a Matemática, ou seja; a Geometria, e tanto a clássica como a moderna. Escher lia ensaios técnicos e correspondia-se com matemáticos e cristalógrafos. Quem conhece a obra de Escher, não pode ficar surpreendido por estas criações só poderem ser possíveis com a ajuda de um matemático e de um designer de artes gráficas. Veja abaixo alguns de seus desenhos periódicos.







BIBLIOGRAFIA

BARBOSA, Ruy Madsen (1993). **Descobrindo Padrões em Mosaicos**. São Paulo : Atual, 126p.

BARBOSA, Ruy Madsen (1993). **Descobrindo Padrões Pitagóricos**. São Paulo : Atual, 126p.

SÁ, Ricardo Cunha da Costa e (1982). **Edros**. São José dos Campos.

SCHATTSCHNEIDER, Dóris e WALKER, Wallace (1991). **Caleidociclos de M. C. Escher**. Köln : Benedikt Taschen Verlag GmbH.