

APLICAÇÕES DE CONCORDÂNCIA, TANGÊNCIA E CURVAS CÔNICAS NA ARQUITETURA

Enéias de Almeida Prado

eneias@uel.br

Daniel Aparecido Geraldini

danielgeraldini@gmail.com

Giuliano Miyaishi Belussi

giu_mb@yahoo.com.br

Profa. Ms. Maria Bernadete Barison

barison@uel.br

Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina
Caixa Postal 6001, 86051-990, Londrina – PR – Brasil

RESUMO

Está sendo desenvolvido um site que tem por objetivo auxiliar no processo ensino/aprendizagem da disciplina Desenho Geométrico através da utilização de hipertexto. Foram estudados diversos assuntos, entre eles tangência, concordância e curvas cônicas. O estudo desses assuntos torna-se mais importante quando se procura analisar as suas aplicações dentro de um contexto histórico cultural observando a evolução da ciência, artes e arquitetura através dos tempos. Os arcos são exemplos de importante aplicação da geometria nas artes e arquitetura da antiguidade. Os arcos tiveram suas formas modificadas e aperfeiçoadas através dos tempos, conforme a disponibilidade de materiais e as necessidades do construtor em obter a melhor solução estrutural e estética para o edifício. Ao se tratar do estudo das cônicas, nota-se o seu importante papel nos vários domínios da Física, Astronomia, Engenharias e Arquitetura Contemporânea. Este trabalho tem por objetivo apresentar e explanar algumas dessas aplicações observando a relevância do estudo das cônicas dentro da matemática.

Palavras chave: Curvas Cônicas, Desenho Geométrico, Matemática, História, Geometria.

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho será apresentado de uma forma a mostrar ao estudante de Matemática o quanto a Geometria está e sempre esteve presente no cotidiano das pessoas. Primeiramente serão abordados os aspectos históricos e teóricos como origens e definições. Posteriormente serão apresentados alguns exemplos de cônicas na natureza, na engenharia e arquitetura, na astronomia e na tecnologia atual. As apresentações são ilustradas com fotos e esquemas explicativos. Espera-se que este trabalho possa contribuir com uma maior compreensão da Geometria por parte do estudante de Matemática no que se refere às aplicações das cônicas nas ciências em geral.

2. ORIGENS DAS CÔNICAS

As Cônicas foram estudadas por Menecmo, Euclides e Arquimedes. A elipse, a parábola, a hipérbole e a circunferência eram obtidas como seções de cones circulares retos com planos perpendiculares a um dos elementos do cone, conforme variação do ângulo no vértice (agudo, reto ou obtuso). Menecmo descobriu a elipse pesquisando sobre a parábola e a hipérbole, pois ofereciam as propriedades necessárias para a solução da duplicação do cubo. Também era de seu conhecimento as equações das curvas conforme a sua secção: quando formada por secção de um cone circular retângulo era (uma constante), quando secção de cone acutângulo e quando secção de cone obtusângulo. O tratado sobre as cônicas estava entre algumas das mais importantes obras de Euclides, porém se perdeu pelo fato do trabalho escrito por Apolônio ser mais extenso.

A obra de nível mais avançado foi precisamente àquela feita por Apolônio de Perga, que substituiu qualquer estudo anterior. O tratado sobre as Cônicas certamente foi uma obra-prima de Apolônio e teve grande influência no desenvolvimento da matemática. Devido fundamentalmente a este estudo sobre as cônicas ele era conhecido como o "Geômetra Magno".

3. AS SECÇÕES CÔNICAS

Considerando-se uma superfície cônica gerada por uma reta chamada geratriz, que gira em torno de uma reta chamada de eixo e mantendo-se fixa em um ponto chamado vértice e tendo como diretriz uma circunferência, obtém-se um cone duplo. A reta geratriz forma com o eixo um certo ângulo α . Considerando este cone duplo, secionado por um plano secante, dependendo do ângulo que este plano secante formar com o eixo, teremos uma das quatro curvas cônicas: a circunferência, a elipse, a parábola ou a hipérbole. A Figura 1 apresenta as secções cônicas obtidas através do plano secante.

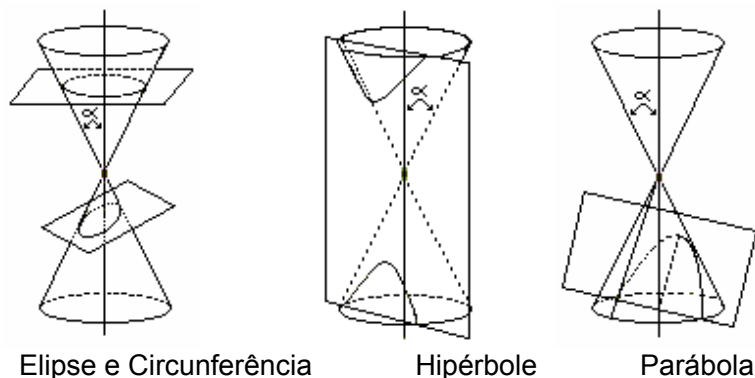


Figura 1 - secções cônicas obtidas através do plano secante.

4. AS CÔNICAS NA NATUREZA

Estas curvas podem ser encontradas na natureza e por esse motivo foram objeto de estudo para diversos matemáticos. A elipse, por exemplo, corresponde à geometria das órbitas de alguns planetas e cometas. A hipérbole corresponde à geometria das trajetórias de alguns cometas e de outros corpos celestes. A parábola corresponde à trajetória de um projétil lançado num campo gravitacional, o que se pode verificar com a trajetória de um jacto d' água. A elipse pode ainda ser encontrada na forma da luz de uma lanterna projetada numa superfície plana. A circunferência, por sua vez, símbolo da perfeição na Grécia Antiga, pode ser encontrada nas ondas produzidas por uma pedra na superfície de um lago ou até mesmo na roda.

5. AS CÔNICAS NA ENGENHARIA E ARQUITETURA

Em engenharia e arquitetura como no caso das pontes, pórticos, cúpulas, torres e arcos, usam-se as cônicas devido às suas propriedades físicas e até mesmo estéticas. Um Exemplo é o cabo de suspensão de uma ponte, quando o peso total é uniforme distribuído segundo o eixo horizontal da ponte, toma a forma de uma parábola, como se pode ver na Figura 2.



Figura 2 – Ponte suspensa.

Um outro exemplo é a planta do Coliseu em Roma, como se pode ver na Figura 3.



Figura 3 – Coliseu – Roma

A hipérbole, ao rodar em torno de um dos eixos de simetria, gera uma superfície que tem o nome de hiperbolóide de revolução. Nestas superfícies as secções ao eixo de rotação são circunferências e as secções paralelas ao eixo são hipérbolas.

Em 1669, Christopher Wren¹ mostrou que o hiperbolóide de uma folha pode ser gerado pelo movimento de uma reta que se apóia em duas circunferências, esta superfície pode ser considerada formada por uma infinidade de retas e é conhecida como superfície regrada. O hiperbolóide de uma folha é usado na construção de centrais de energia, nomeadamente em centrais atômicas, que são regradas e podem ser reforçadas com barras de aço retilíneas, que se cruzam por forma a obter estruturas extremamente fortes.

Na representação Arquitetônica nada melhor do que Oscar Niemeyer, arquiteto famoso, principalmente, pelas curvas impostas a edificações de arquitetura singular em Brasília e pelas formas revolucionárias de seu estilo arquitetônico. Oscar Niemeyer tem um gênio de artista e vê a arquitetura de forma única:

"De um traço nasce a arquitetura. E quando ele é bonito e cria surpresa, ela pode atingir, sendo bem conduzida, o nível superior de uma obra de arte."

Oscar Niemeyer nasceu no Rio de Janeiro, em 1907. Em 1934, diplomou-se como engenheiro e arquiteto no Rio de Janeiro. Iniciou sua vida profissional no escritório do arquiteto Lúcio Costa, que projetou o Plano-Piloto de Brasília. Oscar Niemeyer projetou várias obras no Brasil e em vários outros países, entre elas o conjunto da Pampulha, em Belo Horizonte, o conjunto Ibirapuera, em São Paulo, os principais prédios de Brasília, o Museu de Arte Contemporânea e muitas outras obras importantes.

Em muitas das suas obras é bem visível o traçado da tangência e concordância de arcos de circunferência e curvas cônicas. As Figuras 4 a11 apresentam algumas obras que evidenciam exemplos desses traçados e entre as figuras apresentam-se algumas citações de Oscar Niemeyer.

¹ Arquiteto da catedral de S. Paulo



Figura 4 - Conjunto da Pampulha. Igreja de São Francisco - Belo Horizonte, 1940.

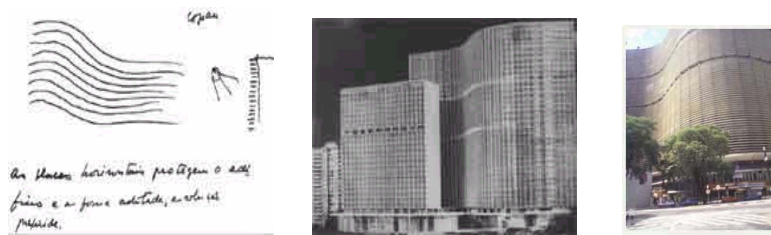


Figura 5 - Conjunto Copan. São Paulo, 1951.



Figura 6 – Catedral de Brasília. Brasília, 1958.

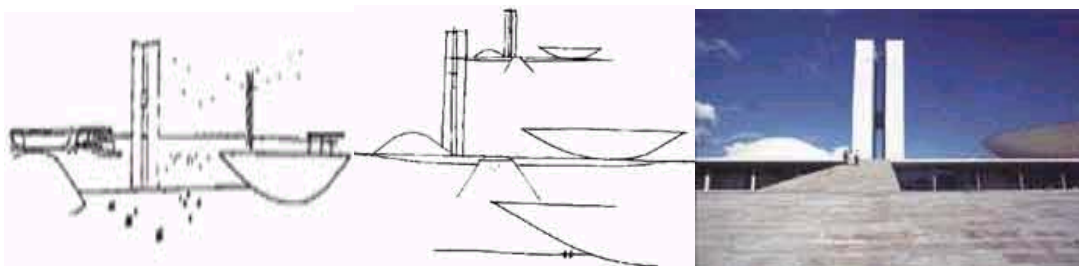


Figura 7 – Congresso Nacional. Brasília, 1958.

"De modo que apesar de todos os problemas, trouxe muita coisa boa e foi para mim uma experiência fantástica, é lógico que eu trabalhei sempre com muita determinação. Eu não

me preocupava com a opinião de ninguém eu não via livro de arquitetura. Eu queria, por exemplo, na Praça dos Três Poderes fazer uma arquitetura mais leve, os prédios como que sempre apenas tocando o chão. Era uma opção como outra qualquer que eu não vou repetir."

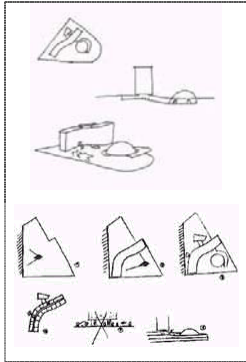


Figura 8 - Sede do Partido Comunista Francês. Paris, 1967.



Figura 9 - Editora Mondadori. Segrate, Milão, 1968.

"Na sede da editora Mondadori mostrei como é importante manter exteriormente um jogo harmonioso de volumes e espaços livres, mantendo as arcadas em vãos desiguais; no ritmo diferente, quase musical que a caracteriza"

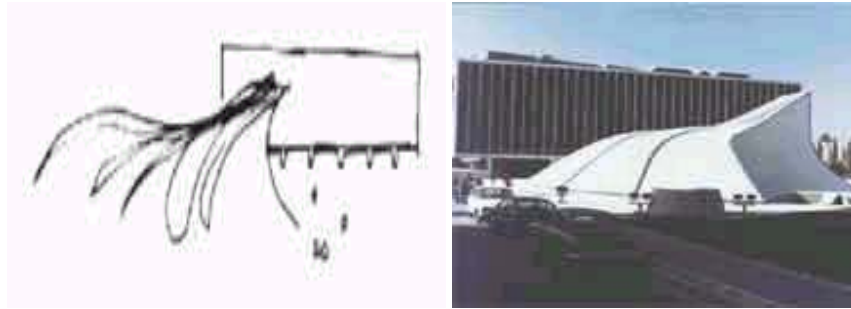


Figura 10 - Bolsa do Trabalho. Bobigny, França, 1972.

"Mostrei como é possível fazer obra econômica, dando ao bloco principal maior economia, enriquecendo-o pelo contraste com as formas livres do auditório."



Figura 11 - Centro Cultural de Le Havre. França, 1972.

6. AS CÔNICAS NA ASTRONOMIA

Na astronomia, a descoberta do cometa Halley é paradigmática. Em 1704 Edmund Halley estudou as órbitas de vários cometas, para as quais existiam dados. Concluiu que os cometas de 1682, 1607, 1531 e 1456 eram afinal um único cometa que descrevia uma órbita elíptica à volta do sol com um período de cerca de 76 anos. Fez a previsão correta do seu retorno em 1758, o que fez com que o cometa ficasse conhecido pelo seu nome. Investigações recentes sugerem que os chineses tivessem registrado este cometa em cerca de 240 a.C..

Durante muitos séculos as concepções sobre o universo eram, fundamentalmente: *concepções geostáticas, isto é, admitia-se que a terra estava fixa; *concepções geocêntricas, pois considerava-se que a terra ocupava o centro do universo, movimentando-se o sol, a lua e as estrelas em torno dela. Os astrônomos estavam convencidos que: todos os astros se movimentavam à volta da terra, as trajetórias dos outros planetas eram circunferências, ou curvas compostas por circunferências que rodavam uma sobre as outras.

Mesmo depois de Copérnio, que no século XVI formulou a teoria heliocêntrica, se acreditava que o "movimento natural" era o movimento circular e, por isso, os planetas deveriam seguir esse tipo de trajetórias à volta do sol. Foi o astrônomo e matemático alemão Johannes Kepler, em 1609, que descobriu que "cada planeta descreve uma elipse de que o Sol ocupa um dos focos" (1ª lei de Kepler). O interesse de Kepler pelas cônicas surgiu devido às suas aplicações à óptica e à construção de espelhos parabólicos.

Quando Kepler estava a realizar um estudo preciso sobre o planeta Marte, tentou encontrar a circunferência que correspondia ao conjunto das posições que conhecia,

verificou que tal não era possível porque as posições conhecidas distribuíam-se por uma espécie de oval.

Para surpresa de Kepler constatou que as curvas estudadas pelos gregos, dezoito séculos antes, constituíam agora um modelo para a interpretação das trajetórias dos planetas. E não só regem os planetas naturais, cometas e asteróides, como todos os satélites artificiais e astronaves cujas trajetórias, podem, hoje, ser preestabelecidas pelos matemáticos, minuto a minuto. Kepler sugere que "o planeta Marte não segue uma trajetória elíptica". Formula então a sua primeira lei. É de notar que as órbitas dos planetas são, de um modo geral, de excentricidade muito pequena.

Anos depois, foi a partir das leis de Kepler que Newton, aplicando-lhes o seu cálculo diferencial, concluiu a Lei da Atração Universal, verificando ainda que os satélites efetuam também uma órbita elíptica em torno do seu planeta. Por exemplo: a órbita da lua que descreve uma trajetória elíptica da qual a terra é um dos seus focos, o que pode ser parcialmente observado na Figura 12.



Figura 12 – Órbita dos planetas

As cônicas também descrevem trajetórias de projéteis, de pontos ou de partículas atômicas elementares, em arcos, pontes, jactos de água, etc. Assim como as trajetórias de bolas ou outros projéteis, dentro da atmosfera terrestre. São, geralmente, arcos de parábolas, que são tanto mais perfeitos quanto menor é a resistência do ar. À ciência que estuda a trajetória e impacto dos projéteis chama-se Balística. A lei da gravitação de Newton matematizou as descobertas empíricas de Kepler e, a partir do séc. XVII, o estudo analítico das cônicas e das suas aplicações aos movimentos no espaço, não cessou de se aperfeiçoar.

7. AS CÔNICAS NA ÓTICA E ACÚSTICA

A parábola ao rodar em torno do seu eixo de simetria, gera uma superfície parabólica ou parabolóide o qual pode ser observado na Figura 13.

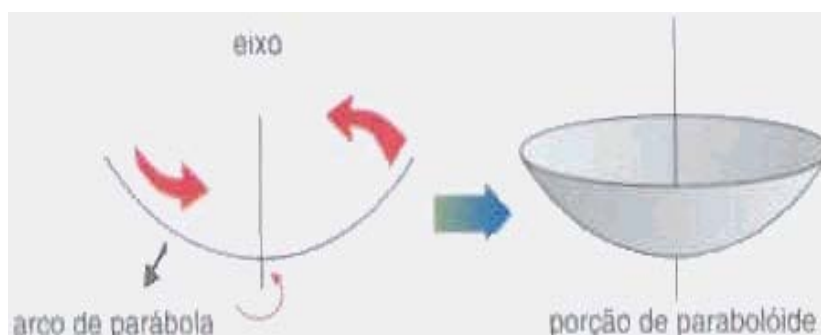


Figura 13 – Parabolóide de Revolução

As propriedades refletoras são geradas por cônicas, parabolóides, hiperbolóides e elipsóides; estas são usadas, por exemplo, nos espelhos e antenas parabólicas ou para criar condições acústicas especiais em auditórios, teatros, catedrais, como acontece na Catedral de S. Paulo (Londres) esquematizada na Figura 14.



Figura 14 - Catedral de S. Paulo.

As propriedades da parábola e do parabolóide resultam do interesse dos espelhos parabólicos: (a) como receptor - todo o raio luminoso que incide num espelho parabólico, paralelamente ao eixo, reflete-se passando pelo Foco e (b) como emissor - reciprocamente, todo o raio luminoso que incide no espelho parabólico passando pelo foco reflete-se paralelamente ao eixo. A Figura 15 ilustra esses espelhos parabólicos.

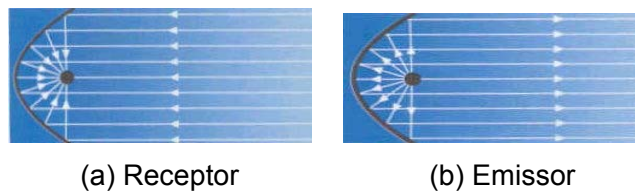


Figura 15 – Espelhos parabólicos

Uma fonte luminosa no foco produz um feixe de raios paralelos, com um maior alcance. Pode usar-se para emitir feixes de ondas de rádio ou de outra natureza. A primeira destas propriedades justifica o funcionamento dos espelhos parabólicos, dos fornos solares, das antenas parabólicas que captam ondas de rádio, de radar ou de outras ondas eletromagnéticas, como as antenas de TV ou a dos enormes rádios telescópios. Conta-se que Arquimedes, durante o cerco de Siracusa, conseguiu incendiar navios romanos usando uns misteriosos espelhos, chamados "ustórios", que enchiam de pavor os sitiados e os punham em fuga. Arquimedes já conhecendo as propriedades das

cônicas, recorreu a um, ou vários espelhos parabólicos colocados de modo a concentrar os raios de Sol refletidos num só ponto, desviando-o depois para uma galera romana que começava a arder.

A segunda propriedade aplica-se em todos os faróis de navegação, de automóvel...e outros tipos de projetores. Por exemplo, num farol parabólico de automóvel a luz emitida pela lâmpada colocada no seu foco é refletida nas paredes e "atirada" para fora, iluminando a estrada. Outro exemplo é o forno solar constituído por grandes espelhos parabólicos. No foco do espelho atinge-se uma temperatura de 3800°C, pois nele convergem os raios soares captados e refletidos pela sua superfície. Estas temperaturas são aproveitadas para conversões de energia, fusão, etc. No entanto, as propriedades acústicas e ópticas não são exclusivas da parábola. De fato, um raio que passe por um dos focos reflete-se na direção do outro foco, tanto na elipse, como na hipérbole.

8. AS CÔNICAS NA TECNOLOGIA ATUAL

Hoje, quando ligamos a televisão podemos ver imagens "ao vivo" provenientes dos mais remotos lugares do mundo. Para nós isto é natural, mas há 25 anos atrás isto era impossível. De fato, só depois dos americanos terem lançado e colocado em órbita um satélite de comunicações, chamado Telstar, as imagens de televisão provenientes de países além oceano atlântico se tornaram possíveis de serem vistas aqui no Brasil "ao vivo". Depois deste primeiro satélite, muitos outros se seguiram, permitindo que os técnicos de comunicação emitissem ou recebessem sinais de televisão ou rádio, passando por estes satélites.

O grande problema das comunicações consiste em localizar e consertar o rasto de um satélite de comunicação no espaço, utilizando-se para isso, antenas muito potentes e exatas, algumas delas com a forma de parabolóide.

Hoje em dia é muito comum vermos pequenas antenas parabólicas nos telhados e terraços, para receber programas estrangeiros de televisão. A construção destas antenas requer grandes conhecimentos de geometria e análise, algumas são constituídas por um grande refletor parabolóide cujo foco é comum a todas as parábolas que o geram. Como todos os raios que incidem no parabolóide paralelamente ao seu eixo se refletem para o foco, concentrando-se aí, se no foco for instalado um aparelho receptor, o sinal será captado e tratado, dando o fim a que se destina.

4. CONCLUSÃO

Com todos estes exemplos da utilização das propriedades das cônicas seja por engenheiros, ou arquitetos ou projetistas, podemos ver que o estudo da Geometria não se trata apenas de aprender teoremas e fazer alguns traçados numa folha de papel, ou mesmo no computador. O estudo da Geometria envolve também uma visão mais ampla que está relacionada com aprender a enxergá-la também no ambiente que está a nossa volta como as grandes edificações e ou as pequenas lanternas nas quais se nota profundamente a presença de conceitos e idéias matemáticas.

4. REFERÊNCIAS

<http://www.niemeyer.org.br/OscarNiemeyer>
<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43/conicas.htm>
<http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/diversos/conicas.html>
<http://www.matematica.br/historia/conicas.html>